Coloração 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone

Júlio C. S. Araújo[1], **Camila S. Araújo**[1], **Alexandre A. Cezar**[1]

[1]Paralelismo, Grafos e Otimização – ParGO
Departamento de Matemática – Universidade Federal do Ceará (UFC)
Campus do Pici, Bloco 914. - Fortaleza, CE - Brasil

Abstract. *Graph Coloring problems are very common in the study of Graph Theory, and there are many variants of the problem. In this paper, we present a result regarding a variant known as Backbone Coloring. Given a graph $G = (V, E)$, a subgraph $H \subseteq G$ and an integer q, a q-backbone ℓ-coloring of (G, H) is a proper coloring ϕ of G such that $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$, for every $uv \in E(H)$. The q-*backbone chromatic number *of (G, H), denoted by $\mathrm{BBC}_q(G, H)$, is the smallest integer ℓ such that there exists a q-backbone ℓ-coloring of (G, H). For G an outerplanar graph and H a matching on G, we show that it is always possible to find a 2-backbone 4-coloring of (G, H). Furthermore, this bound is tight, that is, there are graphs G and H such that* $\mathrm{BBC}_2(G, H) = 4$.

Resumo. *Problemas de Coloração de Grafos são bem comuns na área de Teoria dos Grafos, existindo várias formas do problema. Neste artigo, apresentamos um resultado numa variação chamada Coloração Backbone. Dado um grafo $G(V, E)$, um subgrafo $H \subseteq G$ e um inteiro q, uma q-backbone ℓ-coloração de (G, H) é uma coloração própria ϕ de G tal que $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$, para todo $uv \in E(H)$. O* número cromático q-backbone *de (G, H), denotado por* $\mathrm{BBC}_q(G, H)$*, é o menor inteiro ℓ tal que exista a q-backbone ℓ-coloração de (G, H). Sendo G grafo periplanar e H um emparelhamento G, mostramos que é sempre possível achar esta 2-backbone 4-coloração de (G, H). Mais que isto, o limitante é apertado, isto é, existem grafos G e H tais que* $\mathrm{BBC}_2(G, H) = 4$.

1. Introdução

Problemas de coloração de Grafos são problemas que envolvem atribuir valores, ou cores, a vértices de um grafo, satisfazendo um conjunto de restrições. Para definições e teoria mais detalhada na área de Teoria dos Grafos ou Coloração de Grafos, referimos ao leitor os livros de Douglas B. West [4] ou Bondy e Murty [3]. Uma *coloração de vértices* em G é uma função $\phi : V(G) \to I_\ell$, onde $I_\ell = \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Dizemos que $\phi : V(G) \to I_\ell$ é *própria* se $|\phi(u) - \phi(v)| \geq 1$, para toda aresta $uv \in E(G)$. Denotamos por $\phi(S) = \{\phi(u) \mid u \in S\}$. Os exemplos mais antigos de coloração de grafos [5] envolvem principalmente coloração de mapas, onde vilarejos eram os vértices e vilarejos vizinhos não podiam ser coloridos com as mesmas cores. Este problema deu origem ao que hoje é conhecido como *Teorema das Quatro Cores* [7]. O estudo de Coloração de Grafos é útil em problemas de *Atribuição de Frequência* [6], onde pode-se ter vários receptores que se comunicam com um satélite via sinais de diversas frequências. Se a dois transmissores vizinhos forem assinaladas frequências iguais, ou mesmo próximas, pode haver uma interferência entre os sinais. Um caso particular de Coloração de Grafos é o problema de Coloração Backbone, primeiramente proposto por Broersma et al. [8], em que as restrições se aplicam não somente ao grafo a ser colorido, como a um subgrafo denotado *backbone*. Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo finito simples e conexo, e um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ de G, dizemos que (G, H) é um *par*, onde H é chamado *backbone* de G. Uma *ℓ-coloração q-backbone* de (G, H) é uma função $\phi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, \ell\}$ tal que, para toda aresta $uv \in E(G)$, temos $|\phi(u) - \phi(v)| \geq 1$ e, para toda aresta $uv \in E(H)$, temos $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$. O *número cromático q-backbone* de (G, H), denotado por $\mathrm{BBC}_q(G, H)$ é o menor inteiro ℓ para o qual existe uma coloração q-backbone $\phi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Ainda em Broersma et al. [8], é demonstrado que para grafos planares, vale que $\mathrm{BBC}_2(G, M) \leq 6$, para G planar e M um emparelhamento. Um grafo é dito *periplanar* quando possui uma imersão no plano tal que todos os seus vértices pertencem a uma mesma face. Mostramos aqui que se G é periplanar, então:

Proposição 1. *Se G é um grafo periplanar e M é um emparelhamento backbone de G, então:*

$$\mathrm{BBC}_2(G, M) \leq 4.$$

Na Seção 2 apresentamos as várias definições necessárias para a compreensão deste texto. A Seção 3 contém os resultados apresentados neste texto, sendo dois lemas auxiliares e a Proposição 1 o nosso foco. Encerramos na Seção 4 com um comentário sobre o resultado e algumas perguntas que até então nos ficaram em aberto.

2. Definições

Dado um par (G, H), um *subpar* (G', H') de (G, H), escrevemos $(G', H') \subseteq (G, H)$, é um par tal que $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$. Além disso, se (G', H') é um subpar de (G, H) com $H' \subsetneq H$ ou $G' \subsetneq G$, dizemos que (G', H') é um subpar próprio de (G, H).

Duas cores c_1 e c_2 são ditas *adjacentes* se $|c_1 - c_2| = 1$. Seja $c \in I_\ell$, denotamos por $[c]$ o conjunto $\{d \in I_\ell \mid |c - d| \leq 1\}$, ou seja, o conjunto formado por c e suas cores adjacentes.

Um subgrafo $G' \subseteq G$ é um *subgrafo induzido* de G se, para quaisquer $x, y \in V(G')$, $xy \in E(G')$ se, e somente se, $xy \in E(G)$.

Um subpar (G', H') é dito *induzido* se G' é um subgrafo induzido de G e H' é um subgrafo de H induzido por $V(H) \cap V(G')$. Seja $C \subseteq V(G)$, denotamos por $(G, H)[C]$ o subpar (G', H') de (G, H) induzido em que $V(G') = C$.

O *grafo dual* G^* de um grafo plano G, isto é, de uma imersão específica de um grafo no plano, é um grafo plano cujos vértices correspondem às faces de G e, além disso, $uv \in E(G^*)$ se, e somente se, u e v representam faces adjacentes em G.

Dado um par (G, H), um subgrafo $G' \subseteq G$ e uma coloração ϕ do subpar $(G', H[V(G')])$, definimos, para cada $u \in V(G) \setminus V(G')$, o *conjunto das cores disponíveis* para u em ϕ, como:

$$A_\phi(u) = I_\ell \setminus \{(\phi(N_{G'}(u)) \cup \{[\phi(v)] \mid v \in N_{H'}(u)\}\}$$

Muitas vezes desejamos saber não os elementos do conjunto $A_\phi(u)$, mas a quantidade de seus elementos. Utilizamos a notação $a_\phi(u)$ para representar $|A_\phi(u)|$.

Um par (G, H) é dito (k, q)-minimal se $\mathrm{BBC}_q(G, H) > k$, mas $\mathrm{BBC}_q(G', H') \leq k$ para todo subpar próprio (G', H') de (G, H). Observe que se $\mathrm{BBC}_q(G, H) \geq k$, então existe um subpar (G', H') de (G, H) que é (k, q)-minimal.

3. Resultados

Lema 2. *Se (G, H) é um par $(k, 2)$-minimal, então G é conexo.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que G não é conexo. Dessa forma, tome $C \subset V(G)$ uma componente conexa de G. Observe que $(G, H) - C$ e $(G, H)[C]$ admitem k-colorações 2-backbone ϕ e ϕ', respectivamente. Combinando ϕ e ϕ', obtemos uma k-coloração 2-backbone de (G, H). Contradição.

□

Lema 3. *Seja (G, M) um par onde M é um emparelhamento backbone de G. Se (G, M) é $(4, 2)$-minimal, então $\delta(G) \geq 2$ e, além disso, se $d_G(v) = 2$, então existe um vértice $w \in V(G)$ tal que $d_G(w) \geq 4$ e $vw \in M$.*

Ideia da prova: Caso existe vértice de grau 0 ou 1, podemos sempre tomar uma coloração parcial do restante do grafo que, para este vértice, sempre haverá uma cor disponível, isto é, que podemos estender a coloração de forma que não haja conflito com a coloração do restante do grafo. Quando o grau do vértice u é 2, pelo mesmo motivo, ele deve ter um vizinho v no emparelhamento. Caso este vizinho tenha grau 3 ou menor, colorimos todo o grafo, excetuando u e v. Vemos que há cores disponíveis para estes vértices também.

Proposição 1. Se G é um grafo periplanar e M é um emparelhamento backbone de G, então:

$$\mathrm{BBC}_2(G, M) \leq 4.$$

Ideia da prova: Consideramos G um grafo $(4, 2)$-minimal. Caso G possua vértices de corte, procuramos uma componente conexa com apenas um destes. Ao considerar uma representação periplana desta componente, temos que seu dual fraco é uma árvore, portanto possui folhas. Analisamos configurações destas folhas e seus ancestrais, estudando a quantidade de filhos que cada um destes ancestrais pode ter e cada possível emparelhamento no subgrafo formado por estes ancestrais. Pela minimalidade de G, sabemos que existe coloração parcial de G se desconsiderarmos os vértices deste subgrafo. Cada possível coloração é estendida para uma 4-coloração 2-backbone de G.

Proposição 4. *Existe grafo periplanar G e emparelhamento M de G tal que*

$$\mathrm{BBC}_2(G, M) = 4.$$

Demonstração. Considere o grafo como na Figura 1, de vértices u, v, x e w, as arestas uv, vx, xw, wu e vw, sendo wu e vx do emparelhamento, temos que este grafo necessita de 4 cores para ser colorido respeitando o backbone. Assim, temos que a Proposição 1 apresenta um limitante apertado. □

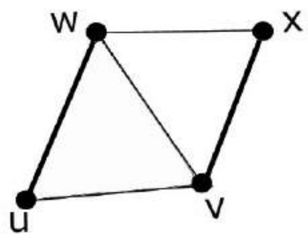

Figura 1. Exemplo em que $\mathrm{BBC}_2(G, M) = 4$**.**

4. Conclusão

Neste trabalho provamos que, para qualquer grafo periplanar G e um emparelhamento M, é possível encontrar uma 4-coloração do grafo respeitando a diferença de 2 entre cores de vértices adjacentes no emparelhamento.

Em aberto seguem os dois questionamentos: e se o grafo planar for arbitrário? Ainda é possível colorir com quatro cores? De Broersma et al. [8], sabemos que é possível colorir utilizando seis cores, no entanto para quatro cores há sempre restrições aplicadas na família de grafos para que seja possível colorir com quatro cores. O segundo questionamento é: é possível relaxar a particularização do valor de q e obter resultados similares? Mais formalmente, existe uma constante c tal que $\mathrm{BBC}_q(G, M) \leq q + c$?

Referências

[1] Julio Araujo, Frédéric Havet, and Mathieu Schmitt. *Steinberg-like theorems for backbone colouring*. Research Report RR-8641, INRIA Sophia Antipolis; INRIA, November 2014.

[2] Alexandre A. Cezar. *Circular backbone colouring for graphs without cycles of size four*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará. 2016

[3] Adrian Bondy. and Uppaluri S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2008.

[4] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. Vol. 2. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001.

[5] Marek Kubale. *Graph colorings*. American Mathematical Soc. volume 352, 2004.

[6] Hale, William K. *Frequency assignment: Theory and applications.* Proceedings of the IEEE 68.12 (1980): 1497-1514.

[7] Rudolf Fritsch, and Gerda Fritsch Four-Color Theorem. Springer-Verlag, 1998.

[8] Broersma, H., Fomin, F. V., Golovach, P. A., Woeginger, G. J. ”Backbone colorings for graphs: Tree and path backbones.”Journal of Graph Theory 55.2 (2007): 137-152.

[9] Broersma, H., Marchal, B., Paulusma, D., Salman, A. N. M. ”Improved upper bounds for λ-backbone colorings along matchings and stars.”International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2007.