PMIH: Poliedro Maximal de Vértices em $\mathbb{Z}^n$ Inscrito em uma Hiperesfera em $\mathbb{R}^n$

Eleazar Gerardo Madriz Lozada[1], Yuri Tavares dos Passos[1], Tales Raian Ribeiro Maltez[2]

[1]CETEC – UFRB
Cruz das Almas – BA – Brazil

[2]IMECC – UNICAMP
Campinas – SP – Brazil

eleazar@ufrb.edu.br, yuri.passos@ufrb.edu.br, talesmaltez2003@hotmail.com

Abstract. *In this work we present an algorithm to construct a polyhedron inscribed in a hypersphere in $\mathbb{R}^n$ with vertices in $\mathbb{Z}^n$ such that between the hypersphere and the polyhedron there are no points in $\mathbb{Z}^n$.*

Resumo. *Neste trabalho apresentamos um algoritmo para construir um poliedro de vértices em $\mathbb{Z}^n$, inscrito em uma hiperesfera em $\mathbb{R}^n$ tal que entre a hiperesfera e o poliedro não existam elementos de $\mathbb{Z}^n$.*

Introdução

A teoria de poliedros deriva-se da teoria de programação linear inteira [Schrijver 1986], quando é considerado o conjunto de soluções factíveis deste problema. Considerando o fecho convexo do conjunto de soluções factíveis deste problema [Rockafellar 1997] obtém-se um poliedro que é a interseção de um número finito de subespaços afins. No caso em que o fecho convexo seja um conjunto limitado, é possível obter-lho a partir das combinações convexas de um subconjunto finito de soluções factíveis. A primeira representação é conhecida como implícita e a segunda, como gerada pelos vértices [Motzkin et al. 1953]. Em geral, o poliedro pode ser decomposto como a soma de um politopo e um cone convexo [Schrijver 1986].

Neste trabalho, para $g \in \mathbb{Z}^n$ consideraremos a $C_g = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \|g\|\}$ onde $\|.\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. De fato no interior de C_g existe uma quantidade finita de subconjuntos $\mathbb{Z}^n$, e assim, se consideramos o fecho convexo de cada um destes subconjuntos, teremos a família de todos os poliedros que estão inscritos em C_g.

O objetivo deste trabalho é descobrir qual destes poliedros verifica a seguinte propriedade: a interseção entre o interior da C_g e o complemento do poliedro não tem elementos em $\mathbb{Z}^n$. Para o caso $n = 2$, o problema foi resolvido em [Maltez and Lozada 2015] e [Maltez 2016].

O Problema do Poliedro Maximal Inscrito numa Hiperesfera (PMIH)

Dado $g \in \mathbb{Z}^n$, seja $C_g = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \|g\|\}$ onde $\|.\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e para V um subconjunto não vazio finito de $\mathbb{Z}^n$, o fecho convexo de V será denotado com $FC(V)$. De fato, para todo $g \in \mathbb{Z}^n$, o conjunto $C_g \cap \mathbb{Z}^n$ é não vazio e finito. Seja

$V \subset C_g \cap \mathbb{Z}^n$ consideremos $f : P(C_g \cap \mathbb{Z}^n) \to \mathbb{N}$ definido como a quantidade de elementos que estão em C_g, não estão em $FC(V)$ e estão em $\mathbb{Z}^n$, isto é

$$f(V) = |(C_g - FC(V)) \cap \mathbb{Z}^n| \tag{1}$$

onde "$-$" denota a diferença entre conjuntos, $|.|$ representa a cardinalidade de um conjunto e para um conjunto S, $P(S) = \{A : A \subset S\}$. Neste trabalho estudamos o seguinte problema de otimização combinatória:

$$\begin{array}{c} \min f(V) \\ \textbf{sujeito a: } V \in P(C_g \cap \mathbb{Z}^n) \end{array} \tag{2}$$

A restrição garante que o poliedro associado à solução ótima é maximal em relação a que entre a hiperesfera e o complemento do poliedro não há elementos em $\mathbb{Z}^n$. Por isto o chamaremos de problema de Poliedro Maximal Inscrito numa Hiperesfera (*PMIH*). Agora, seja $B(g, n)$ o bloco $[-\lfloor\|g\|\rfloor, \lfloor\|g\|\rfloor]^n$, onde $\lfloor\cdot\rfloor$ denota a parte inteira inferior. Como $C_g \cap \mathbb{Z}^n \subset B(g, n) \cap \mathbb{Z}^n$, a cardinalidade de $C_g \cap \mathbb{Z}^n$ é menor ou igual que $(2\lfloor\|g\|\rfloor + 1)^n$, assim, temos $|C_g \cap \mathbb{Z}^n| \leq (2\lfloor\|g\|\rfloor + 1)^n$. Por outro lado, seja $H = \partial B(g, n) \cap C_g$, onde $\partial B(g, n)$ é a fronteira de $B(g, n)$. Como $FC(H) \cap \mathbb{Z}^n \subset C_g \cap \mathbb{Z}^n$, temos que

$$|FC(H) \cap \mathbb{Z}^n| \leq |C_g \cap \mathbb{Z}^n| \leq (2\lfloor\|g\|\rfloor + 1)^n. \tag{3}$$

Assim, temos que $2^{|FC(H)\cap\mathbb{Z}^n|} \leq 2^{|C_g\cap\mathbb{Z}^n|} \leq 2^{(2\lfloor\|g\|\rfloor+1)^n}$. A partir desta desigualdade, podemos afirmar que o problema do $PMIH$ pode ser resolvido no pior caso usando força bruta em $O(2^{(2\lfloor\|g\|\rfloor+1)^n})$. A motivação central deste trabalho é obter o fecho convexo dos pontos em $\mathbb{Z}^n$ que satisfazem a restrição em (2) por meio de um algoritmo de ordem de tempo de execução menor que $O(2^{(2\lfloor\|g\|\rfloor+1)^n})$.

Algoritmo

As entradas do Algoritmo 1 são $n \in \mathbb{N}^*$, a dimensão onde está a hiperesfera, e $g \in \mathbb{Z}^n$ um ponto que define o raio $r = \|g\| > 0$ da hiperesfera. A saída do Algoritmo 1 é um conjunto dos pontos em $\mathbb{Z}^n$ mais próximos da hiperesfera que define C_g.

Cada um destes pontos será implementado por uma tupla, cuja dimensão crescem à medida que novas dimensões forem inseridas. Inicialmente, cada tupla tem dimensão 1 e será representada por (k), onde $k \in \mathbb{Z}$. A dimensão de uma tupla pode ser incrementada da seguinte forma. Seja I uma tupla de dimensão $n - 1$ tal que $I = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$. Acresenta-se uma coordenada em I, simbolizada no Algoritmo 1, por (I, k), para um valor qualquer $k \in \mathbb{Z}$. O resultado deste acréscimo será $I = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, k)$. Uma tupla, portanto, pode ser implementada com uma lista encadeada. No Algoritmo 1, a saída está implementada como uma deque de tuplas. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, o *resíduo de norma inteiro* é o maior inteiro s tal que $\|(\mathbf{x}, s)\| = \|(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\| \leq r$. Em outras palavras, o resíduo de norma inteiro define o maior valor inteiro que se permite inserir na tupla $\mathbf{x}$ sem aumentar a norma de $(\mathbf{x}, s)$ além do valor r. Para a norma euclidiana, o resíduo de norma inteiro é dado por $s = \pm\lfloor\sqrt{r^2 - \|\mathbf{x}\|^2}\rfloor$. A ideia de resíduo de norma inteiro pode ser definida usando qualquer norma e assim o Algoritmo 1 pode ser adaptado para bolas n-dimensionais definidas com outra norma, basta mudar a equação do resíduo de norma inteiro na linha 15 do Algoritmo 1. O Algoritmo 1 inicialmente verifica o caso trivial, isto é, quando $n = 1$, e executa apenas as linhas 3 e 4, pois a iteração da

Entrada: $n \in \mathbb{N}^*, g \in \mathbb{Z}^n$
Saída: $R = \{x \in \mathbb{Z}^n : r - 1 < \|x\| \leq r\}$

1 Inicialize uma deque R vazia;
2 **se** *n = 1* **então**
3   Adicione a R a tupla $(-\lfloor r \rfloor)$;
4   Adicione a R a tupla $(\lfloor r \rfloor)$;
5 **senão**
6   **para** $k \leftarrow -\lfloor r \rfloor$ **até** $\lfloor r \rfloor$ **faça**
7   Adicione a R a tupla (k);
8   **fim**
9 **fim**
10 **para** $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
11   Atribua a Rl o tamanho atual de R;
12   **para** $j \leftarrow 1$ **até** Rl **faça**
13   Atribua a I a tupla no topo de R e desempilhe-a de R;
14         $l \leftarrow \|I\|$;
15         $s \leftarrow \lfloor \sqrt{r^2 - l^2} \rfloor$;
16   **se** *n = i* **então**
17   **se** $s \neq 0$ **então**
18   Adicione no final da deque R a tupla $(I, -s)$;
19   Adicione no final da deque R a tupla (I, s) ;
20   **senão**
21   Adicione no final da deque R a tupla (I, s) ;
22   **fim**
23   **senão**
24   **para** $k \leftarrow -s$ **até** s **faça**
25   Adicione no final da deque R a tupla (I, k) ;
26   **fim**
27   **fim**
28   **fim**
29 **fim**

Algoritmo 1: Lista os pontos inteiros internos a uma esfera n-dimensional mais próximos da sua superfície.

linha 10 a 29 não é executada neste caso. Para o laço externo nas linhas 10 a 29, tem-se o seguinte invariante de laço [Cormen 2009]

$$(2 \leq i < n \implies R = \{(\mathbf{x}, k) \in \mathbb{Z}^{i-1} : \|(\mathbf{x}, k)\| \leq r \wedge k \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\} \wedge$$
$$s \text{ é resíduo de norma inteiro de } \mathbf{x}\}) \wedge (i \geq n \implies R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : r - 1 < \|\mathbf{x}\| \leq r\}).$$

Este invariante se mantém nas três fases do laço. Na **inicialização**, após a atribuição $i \leftarrow 2$, tem-se que $R = \{k \in \mathbb{Z} : \|(k)\| \leq r \wedge k \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}\}$ devido a execução prévia das linhas 6 a 8. Na **manuntenção**, o laço das linhas 12 a 28 adiciona uma coordenada a mais em cada elemento de R. Cada elemento de R com dimensão $i - 1$ será removido (linha 13) para serem adicionados novos elementos em R com dimensão i. O resíduo de norma inteiro para este elemento removido é calculado na linha 15. Os valores a serem adicionados na tupla dependem do valor de i, testado na condição da linha 16. Se $i \neq n$, as linhas de 24 a 26 são executadas e, portanto, após a linha 28, $R = \{(\mathbf{x}, k) \in \mathbb{Z}^i : \|(\mathbf{x}, k)\| \leq r \wedge k \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$ Se $i = n$, as linhas 16 a 22 são executadas e tem-se $R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : r - 1 < \|\mathbf{x}\| \leq r\}$. Quando i é incrementado na linha 29, o invariante se mantém. No **término**, tem-se que $i = n + 1$. O invariante é verdadeiro devido ao segundo condicional. Assim, implica-se que $R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : r - 1 < \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ Quando $n = 1$, o algoritmo executa em tempo constante as adições de apenas dois elementos na deque. Para $n > 1$, a complexidade do algoritmo quanto à adições de elementos em R é dada por:

$$\underbrace{2\lfloor r \rfloor + 1}_{\text{linhas 6 a 8}} + \underbrace{E(j)|R_{n-1}|}_{\text{linhas 16 a 22}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{|R_{i-1}|} \left(2 \left\lfloor \sqrt{r^2 - \|I_j\|^2} \right\rfloor + 1 \right)}_{\text{linhas 24 a 26}}, \tag{4}$$

com R_i representando a deque de dimensão i, I_j denotando a tupla j existente na deque R_i e $E(j) = 1$ se para $\|I_j\|$, $s = 0$ na linha 15 e $E(j) = 2$, caso contrário. Os valores de $\|I_j\|$ são limitados por r e o tamanho de cada R_i é limitado por $(2\lfloor r \rfloor + 1)^i$, devido à Equação 3. Assim, o algoritmo executa em tempo $O(r^{n-1})$.

A solução do problema $PMIH$ é obtida usando a saída do Algoritmo 1 como entrada do algoritmo proposto em [Chazelle 1993] para retornar o fecho convexo destes pontos. Este algoritmo roda em $O(r^{n-1} \log r^{n-1} + r^{(n-1)\lfloor n/2 \rfloor})$.

Referências

Chazelle, B. (1993). An optimal convex hull algorithm in any fixed dimension. *Discrete & Computational Geometry*, 10:377–409.

Cormen, T. H. (2009). *Introduction to algorithms*. The MIT Press, Cambridge, Masachusetts; London.

Maltez, T. R. R. (2016). Polígono inscrito em uma circunferência sem pontos z2 entre a circunferência e o polígono. Monografia (Bacharel em Ciências Exatas e Tecnológicas), UFRB (Universidade Federal do Recôncavo da Bahia), Cruz das Almas, Brasil.

Maltez, T. R. R. and Lozada, E. G. M. (2015). Uma ferramenta dinâmica de geogebra para o estudo de polígonos não regulares inscritos em uma circunferência. In *III Reconcitec*.

Motzkin, T., Raiffa, H., Thompson, G. L., and Thrall, R. M. (1953). The double description method. In Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., editors, *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton University Press.

Rockafellar, R. (1997). *Convex Analysis*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press.

Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, USA.