Utilizando álgebras de flags para problemas de combinatória extremal

Roberto F. Parente[1,2], Cristiane M. Sato[3]

[1] Departamento de Ciêcia da Computação – Universidade Federal da Bahia
Salvador, Brasil

[2]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
São Paulo, Brazil

[3]Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC
Santo André, Brazil

robertop@ime.usp.br, c.sato@ufabc.edu.br

Abstract. *The goal of this paper is to present a simple introduction to the theory of flag algebras developed by Razborov, as well as illustrate this theory's power for obtaining results in extremal combinatorics. In this paper, we investigate a density problem in tournaments.*

Resumo. *O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução acessível à teoria das álgebras de flags desenvolvida por Razborov, bem como ilustrar a aplicabilidade desta teoria para obter resultados em combinatória extremal. Neste trabalho, lidamos com um problema de densidade em torneios.*

Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução à teoria de álgebras de flag, desenvolvida por Razborov [Razborov 2007], que tem sido utilizada em diversos problemas de combinatória extremal. Para ilustrar a aplicabilidade dessa teoria, apresentamos um resultado para torneios [Coregliano et al. 2015, Parente 2016] obtido utilizando técnicas da teoria de álgebra de flags.

Um *torneio* é um digrafo $T = (V, A)$ tal que, para cada par não-ordenado de vértices $\{u, v\}$, temos que exatamente um dentre (u, v) e (v, u) pertence a A (veja a Figura 1). O problema que estudamos é o seguinte. Seja T um torneio com t vértices. Queremos calcular o seguinte valor: $\max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(T, T_n)$, onde $\mathcal{T}_n$ é o conjunto de todos os torneios com n vértices e $p(T, T_n)$ é o número de cópias de T em T_n dividido por $\binom{n}{t}$. Note que $p(T, T_n)$ é a probabilidade de, ao sortearmos um conjunto S de t vértices de T_n, obtermos um digrafo $T_n[S]$ isomorfo a T. Dizemos que $p(T, T_n)$ é a *densidade* de T em T_n. Ou seja, queremos saber qual é a densidade máxima de T considerando todos os torneios em n vértices. Em combinatória extremal, é comum lidarmos com versões assintóticas dos problemas investigados. No nosso caso, isso significa que queremos calcular o valor $\lim_{n\to\infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(T, T_n)$. Neste trabalho, utilizamos álgebras de flag para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n) = 1/16, \tag{1}$$

The first author is supported by FAPESP grant (2016/24041-6) and this article was produced as part of the activities of FAPESP Research, Innovation and Dissemination Center for Neuromathematics (grant 2013/ 07699-0 , S.Paulo Research Foundation). The second author is Partially supported by FAPESP grant (Processo 2013/03447-6).

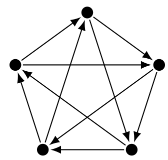

Figura 1. Torneio R: um torneio em 5 vértices.

onde R é o torneio na Figura 1. A prova completa do resultado está disponível em [Coregliano et al. 2015, Parente 2016].

Destacamos que uma característica de grande interesse no uso das álgebras de flags é a fácil utilização de resolvedores de programas semidefinidos para a obtenção de cotas superiores para os valores que queremos calcular.

Álgebra de flags

Nesta seção, apresentamos brevemente alguns conceitos de álgebra de flags. Para facilitar a leitura, definiremos flags no contexto de torneios. No entanto, um dos aspectos mais atrativos dessa teoria é que esta pode ser usada para modelar diversas estruturas combinatórias como, por exemplo, grafos, hipergrafos, permutações, grafos livres de uma família de grafos proibidos, entre outras. Mais precisamente, a teoria de álgebra de flags foi criada para lidar com qualquer teoria universal de primeira ordem.

A idéia principal é criar uma álgebra que capture as densidades $p(T, T_n)$. Trabalhamos com torneios rotulados e parcialmente rotulados: um *tipo* é um torneio cujo conjunto de vértices é $\{1, \ldots, t\}$ para algum $t \in \mathbb{N}$; dado um tipo σ com t vértices, uma *σ-flag* é um par $F = (T, \theta)$ onde T é um torneio, $\theta : \{1, \ldots, t\} \to V(T)$ é uma imersão de σ em T, ou seja, a função θ é um isomorfismo entre σ e o torneio induzido por $\mathrm{im}(\theta)$ em T. Veja a Figura 2. Dado um tipo σ, denotamos por $\mathcal{F}^\sigma_\ell$ o conjunto das σ-flags com ℓ vértices e fazemos $\mathcal{F}^\sigma = \cup \mathcal{F}^\sigma_\ell$. Para σ-flags T, T' de tamanhos $t \leq t'$, definimos $p(T, T')$ como a razão entre o número de conjuntos W de tamanho $t - s$ (onde $s = |V(\sigma)|$) tais que $T'[W \cup S]$ é isomorfo a T (onde S é o conjunto de vértices rotulados de T) e $\binom{t'}{t-s}$.

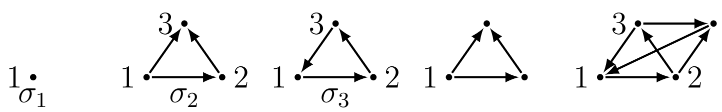

Figura 2. Tipos σ_1, σ_2 e σ_3, uma σ_1-flag e uma σ_3-flag

Em seguida, construímos o conjunto $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ de todas as combinações lineares formais dos elementos de $\mathcal{F}^\sigma$. Por exemplo, se T e T' são σ-flags, então $T + T'$, $T - T'$, $4T - (2/3)T'$ são elementos de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ (ou seja, qualquer combinação com quaisquer coeficientes é válida). No entanto, esse espaço de combinações não captura as densidades como queríamos e não mostra nenhuma relação entre as combinações. Para capturar as densidades, gostaríamos que T fosse considerado igual à combinação linear $\sum_{T_n \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(T; T_n) T_n$, pois $p(T, T_n) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(T; \tilde{T}) p(\tilde{T}, T_n)$. Isso pode ser feito da seguinte maneira. Considere o subsepaço linear $\mathcal{K}^\sigma$ gerado pelos elementos $T - \sum_{T_n \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(T; T_n) T_n$ (para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq V(T)$). Queremos considerar todos os elementos de $\mathcal{K}^\sigma$ como zero.

Isso é feito definindo $\mathcal{A}^\sigma = \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma/\mathcal{K}^\sigma$ como a álgebra[1] obtida pelo quociente de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ por $\mathcal{K}^\sigma$. Por exemplo, seja T uma σ-flag com t vértices e T' uma σ-flag com t' vértices. Como poderíamos avaliar a expressão $T - T'$? Seja $n \geq \max\{t, t'\}$ e suponha que $\sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T; T_n) = (1/2)T_a + (1/2)T_b$ e $\sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T'; T_n) = (1/3)T_a + (2/3)T_b$. Então na álgebra vale que $T - T' = (1/6)T_a - (1/6)T_b$.

Agora volte a considerar o problema de mostrar que $\lim_{n\to\infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n)$ é $1/16$, onde R é o torneio na Figura 1. Uma propriedade interessante é que existe uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de torneios com tamanho crescente tal que não apenas $\lim_{n\in\mathbb{N}} p(T, T_n) = 1/16$, mas $\lim_{n\in\mathbb{N}} p(T', T_n)$ também existe para todo torneio T'. Assim, é natural dizer que uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de σ-flags é *convergente* se é crescente e para toda σ-flag fixa $F \in \mathcal{F}^\sigma$, a sequência de números reais $(p(F; F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Ou seja, o nosso problema é equivalente a calcular $\lim_{n\to\infty} p(T, T_n)$ onde $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente.

Uma parte essencial da teoria de álgebra de flags é lidar com essas sequências convergentes. O que seria um objeto-limite apropriado? Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente de σ-flags, precisamos de um objeto ϕ para o qual e $\phi(T) = \lim_{n\to\infty} p(T; T_n)$. Seja $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ homomorfismos de álgebras[2] ϕ de $\mathcal{A}^\sigma$ para $\mathbb{R}$ tal que $\phi(T) \geq 0$ para toda σ-flag T. Dizemos que uma sequência de σ-flags $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\phi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ se $\phi(T) = \lim_{n\to\infty} p(T; T_n)$ para toda σ-flag T.

Como saber que esses homomorfismos são o objeto-limite "certo" para as sequencias convergentes? Um belo resultado de Razborov [Razborov 2007, Theorem 3.3] e de Lovász e Szegedy [Lovász and Szegedy 2006] nos diz que toda sequência convergente de σ-flags converge para um homomorfismo em $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$. Por outro lado, para todo homomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$, existe uma sequência de σ-flags que converge para ϕ. Assim, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n) = \max_{\phi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^{\mathbf{0}}, \mathbb{R})} \phi(T), \qquad \text{onde } \mathbf{0} \text{ é um torneio sem vértices.} \tag{2}$$

O método semidefinido para álgebra de flags

Note que prover limitantes inferiores para problemas de densidade máxima é uma tarefa relativamente fácil. De fato, toda sequência crescente de torneios $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos dá um limitante inferior $\limsup_{n\to\infty} p(T; T_n)$. De fato, seja R_{2n+1} o que chamaremos de *torneio carrossel*. Esse torneio tem conjunto de vértices $V(R_{2n+1}) = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ e conjunto de arcos $A(R_{2n+1}) = \{(v, (v+i) \bmod (2n+1)) : v \in V(R_{2n+1}) \text{ e } i \in [n]\}$, onde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Através de uma prova combinatória simples, pode-se mostrar que $\lim_{n\to\infty} p(R, R_n) = 1/16$. Mas como mostrar que não é possível atingir um valor maior? De fato, essa é a parte difícil da prova.

Na seção anterior, vimos que o problema de calcular a densidade máxima de R pode ser visto como um problema de maximização em $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$. À primeira vista, pode parecer que trocamos um problema relativamente simples de descrever e de forte

[1] Para que $\mathcal{A}^\sigma$ seja de fato uma álgebra, é preciso que definir também um produto. Para detalhes, veja o artigo [Coregliano et al. 2015, Parente 2016].

[2] Uma função $\phi : \mathcal{A}^\sigma \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo de álgebra se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{A}^\sigma$, vale que $\phi(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \phi(f)$, $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ e $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$.

intuição combinatória por um problema muito mais difícil por lidar com objetos muito mais complexos (os homomorfismos). De fato, a intuição combinatória perde-se nos homomorfismos. No entanto, Razborov desenvolveu um método para formular problemas semidefinidos para obter limitantes superiores para (2). Dessa forma, podemos usar o auxílio do computador por meio de resolvedores para programas semidefinidos para obter esses limitantes. Esse método tem sido usado com muito sucesso para avançar o entendimento de diversos problemas de combinatória extremal.

A seguir, descrevemos como construir o programa semidefinido para o nosso problema. Primeiro, escolhemos um número $m \in \mathbb{N}$ e tipos $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$. Para cada $1 \le i \le m$, seja k_i o número de vértices de σ_i. Em seguida, escolhemos números $\ell, \ell_1, \ldots, \ell_m$ tais que $2\ell_i - k_i \le \ell$ para todo $1 \le i \le m$.

No programa semidefinido abaixo, as variáveis são matrizes $Q(i) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}}$, para $1 \le i \le m$. Uma matriz simétrica real é dita *positiva semidefinida* se todos os seus autovalores são não-negativos. Para duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o produto interno $\langle A, B \rangle$ é definido como $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{i,j}$. O programa semidefinido é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\min y \\
&\text{s.t.} \quad p(R,T) + \sum_{i=1}^{m} \langle Q(i), C(i,T) \rangle \le y \qquad \forall T \in \mathcal{T}_\ell; \\
&\qquad\quad Q(i) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}} \text{ é positiva semidefinida} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\},
\end{aligned}
$$

onde $C(i,T) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}}$ é uma matriz de coeficientes tal que, para $T_1, T_2 \in \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}$,

$$
C(i,T)_{T_1,T_2} = \sum_{T \in \mathcal{F}_{\ell}^{\sigma_i}} p(T_1, T_2; T) p(\sigma_i, T|_0) p(T|_0, T),
$$

onde $T|_0$ é o torneio obtido a partir de T após a remoção dos rótulos e $p(T_1, T_2; T)$ é a *densidade conjunta* de T_1 e T_2 em T, que é definida por $p(T_1, T_2; T) = |W| / \left(\frac{\ell!}{(\ell_i - k_i)!^2 (\ell - 2\ell_i - 2k_i)!} \right)$, onde W é o conjunto de pares (W_1, W_2) de subconjuntos disjuntos de $V(T)$ de tamanho $\ell_i - k_i$ tais que $T[W_1 \cup S] \cong T_1$ e $T[W_2 \cup S] \cong T_2$ e S é o conjunto de vértices rotulados de T. Claramente, computar esses coeficientes é uma parte trabalhosa para a aplicação do método. Para o nosso problema, escolhemos $m = 3$, $\ell = 5$, $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = \ell_3 = 4$. Os tipos σ_1, σ_2 e σ_3 estão na Figura 2. Com isso, obtemos um programa semidefinido e utilizamos os programas CDSP e SDPA para obter o valor $1/16$.

Referências

[Coregliano et al. 2015] Coregliano, L. N., Parente, R. F., and Sato, C. M. (2015). On the maximum density of fixed strongly connected subtournaments. *ArXiv e-prints*.

[Lovász and Szegedy 2006] Lovász, L. and Szegedy, B. (2006). Limits of dense graph sequences. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(6):933–957.

[Parente 2016] Parente, R. F. (2016). *Empacotamento e contagem em digrafos: cenários aleatórios e extremais*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

[Razborov 2007] Razborov, A. (2007). Flag algebras. *J. Symbolic Logic*, 72(4):1239–1282.