Modelos para o Problema de Alocação de Pedágios

Alloma Silva[1], **Geraldo R. Mateus**[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – Belo Horizonte, MG – Brasil

{alloma,mateus}@dcc.ufmg.br

Abstract. *This work proposes solutions to minimize the traffic congestion by balancing the flow of vehicles that traverse the streets, through the allocation of tollbooths in strategical points. Thus, the main objective of this work is to propose mathematical models and to compare the limits for this problem.*

Resumo. *Este trabalho propõe soluções para minimizar o congestionamento do tráfego, controlando o fluxo de veículos que trafegam pelas vias, por meio da alocação de pedágios em pontos estratégicos. Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é propor modelos matemáticos e comparar os limites para este problema.*

1. Introdução

O crescimento do número de veículos nas vias tem ocasionado diversos problemas para a sociedade nas últimas décadas. A maioria das cidades não foi projetada para suportar o tráfego atual. Assim, quando há um fluxo de veículos desbalanceado, onde uma determinada demanda de veículos que passa pela via ultrapassa a capacidade da mesma, tem-se o congestionamento de tráfego. Nesse sentido, este trabalho propõe soluções para minimizar o congestionamento de tráfego através do controle do fluxo de veículos que trafegam nas vias; a abordagem consiste na alocação de pedágios em pontos estratégicos. Os pedágios funcionam como uma penalidade econômica para desencorajar o uso de alguns caminhos. O objetivo maior então, é escolher a melhor configuração para as tarifas a fim de reduzir os custos de viagem e balancear o tráfego. Neste caso, assume-se que os usuários escolhem os caminhos considerando o valor gasto com deslocamento e tarifas. Esse é um problema combinatório, cuja resolução demanda grande esforço computacional.

2. Formulação do Problema

Seja $G = (N, A)$ um grafo direcionado com um conjunto de nós N e um conjunto de arcos ponderados A. Seja K um conjunto de tráfegos (origens e destinos) para cada nó de origem $i \in N$ e de destino $j \in N$ com demanda d^k, $k \in K$. Sejam R um número máximo de pedágios que podem ser instalados nos arcos da rede, e L um número de níveis de tarifas. Para cada arco $(i, j) \in A$ tem-se um custo unitário c_{ij}^p de deslocamento, um custo fixo de tarifa t_{ij}^p e uma capacidade u_{ij}^p variando por nível $p = \{0, 1, ..., L\}$. A tarifa pode ser zero ($t_{ij}^0 = 0$) se a capacidade u_{ij}^0 garantir que não haja congestionamento. O objetivo é minimizar os custos associados ao deslocamento e às tarifas, atendendo o tráfego e instalando um máximo de R pedágios.

3. Modelos de Programação Linear Inteira

Os modelos apresentados neste trabalho baseiam-se em Programação Linear Inteira (PLI). Nas duas abordagens, tem-se um número máximo R de postos de pedágios que se deseja instalar a fim de diminuir o congestionamento de determinadas vias. Assume-se que os usuários das vias optem sempre pelos caminhos de menor custo e que os arcos com capacidade mínima (u_{ij}^{p}, onde $p = 0$) não possuem pedágios, em outras palavras, a tarifa para esse nível é igual a zero.

Os modelos utilizam as variáveis: x_{ij}^{k} (indica se há fluxo da demanda k no arco (i, j)), x_{ij}^{kp} (indica se há fluxo do produto k no arco (i, j) no nível p), y_{ij}^{p} (indica se o pedágio no nível p é alocado ao arco (i, j)) e z_{ij}^{p} (fluxo total no arco (i, j) no nível p).

3.1. Modelo 1

Função objetivo:

$$min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{p=0}^{L} c_{ij}^{p} z_{ij}^{p} + \sum_{(i,j)\in A} \sum_{p=1}^{L} t_{ij}^{p} z_{ij}^{p} \tag{1}$$

Sujeito ao seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{(i,j)} x_{ij}^{k} - \sum_{(j,i)} x_{ji}^{k} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = o(k) \\ -1 & \text{se} \quad i = d(k) \quad \forall i \in N, \forall k \in K \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_{p=0}^{L} y_{ij}^{p} \geq x_{ij}^{k}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \tag{3}$$

$$\sum_{p=0}^{L} y_{ij}^{p} \leq 1, \qquad \forall (i, j) \in A \tag{4}$$

$$\sum_{p=1}^{L} \sum_{(i,j)} y_{ij}^{p} \leq R \tag{5}$$

$$\sum_{p=0}^{L} z_{ij}^{p} = \sum_{k} x_{ij}^{k} d^{k}, \qquad \forall (i, j) \in A \tag{6}$$

$$0 \leq z_{ij}^{p} \leq u_{ij}^{p} y_{ij}^{p}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall p \in L \tag{7}$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \tag{8}$$

$$y_{ij}^{p} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall p \in L \tag{9}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos associados ao tráfego de veículos: O primeiro termo refere-se ao custo de deslocamento, enquanto que o segundo aos custos referentes às tarifas. As restrições (2) referem-se à conservação do fluxo (a existência de um caminho entre a origem e o destino para cada demanda). As restrições (3) e (4) garantem que cada arco pode conter pedágio em apenas um nível, caso haja um fluxo de veículos passando por esses. A restrição (5) assegura que serão instalados até R pedágios. As restrições (6) associam a soma do fluxo total de cada arco $(i, j) \in A$, divididos em p níveis, à soma das demandas que passam pelos arcos. O conjunto de restrições (7) garante que o fluxo total de cada arco não excederá a capacidade máxima de cada nível p. Por fim, as restrições (8) e (9) definem o domínio das variáveis de decisão x e y.

3.2. Modelo 2

O segundo modelo, diferentemente do primeiro, é baseado na formulação do Problema de Fluxo Multiproduto em um grafo aumentado (p arcos para cada arco no grafo original), com variáveis e restrições adicionais. Cada um desses arcos está relacionado com uma capacidade e todas as demandas que passam entre dois nós devem utilizar o mesmo arco, isto é, apenas um nível pode ser escolhido para cada arco.

Função objetivo:

$$min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{p=0}^{L} \sum_{k} c_{ij}^{p} x_{ij}^{kp} d^{k} + \sum_{(i,j)\in A} \sum_{p=1}^{L} \sum_{k} t_{ij}^{p} x_{ij}^{kp} d^{k} \tag{10}$$

Sujeito ao seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{(i,j)} \sum_{p=0}^{L} x_{ij}^{kp} - \sum_{(j,i)} \sum_{p=0}^{L} x_{ji}^{kp} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = o(k) \\ -1 & \text{se} \quad i = d(k) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in N, \forall k \in K \tag{11}$$

$$y_{ij}^{p} \geq x_{ij}^{kp}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \forall p \in L \tag{12}$$

$$\sum_{p=0}^{L} y_{ij}^{p} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in A \tag{13}$$

$$\sum_{(p=1)}^{L} \sum_{(i,j)} y_{ij}^{p} \leq R \tag{14}$$

$$\sum_{k} x_{ij}^{kp} d^{k} \leq u_{ij}^{p} y_{ij}^{p}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall p \in L \tag{15}$$

$$x_{ij}^{kp} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \forall p \in L \tag{16}$$

$$y_{ij}^{p} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall p \in L \tag{17}$$

A função objetivo (10) minimiza os custos associados ao tráfego de veículos (custo de deslocamento e custos referentes às tarifas). As restrições (11) referem-se à conservação do fluxo, que garante um caminho para cada demanda. As restrições (12) e (13) garantem que cada arco pode conter pedágio em apenas um nível, nesse caso há um fluxo de veículos passando por esses. E a restrição (14) assegura que um número máximo R de pedágios serão instalados. O conjunto de restrições (15) garante que o fluxo total de cada arco não excederá a capacidade de cada nível. Por fim, as restrições (16) e (17) definem o domínio das variáveis de decisão x e y.

4. Resultados Computacionais

Os modelos foram implementados em linguagem C com a biblioteca de otimização [CPLEX 2009] versão 12.6. Os experimentos foram conduzidos no sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS, processador Intel® Xeon® E5645, 2.40 GHz de frequência e 32 GB de memória RAM. Foi estabelecido um limite de tempo de 10800 segundos. O caractere " - " indica que o limite foi alcançado. Os experimentos foram realizados utilizando quatro instâncias sintéticas (8, 12, 16 e 20 nós), criadas a partir da instância original *Sioux Falls Test Network* [Meng and Yang 2002] que possui 24 nós, com diferentes capacidades em cada um dos arcos, coordenadas e demandas fixas para os pares de nós.

O custo de deslocamento (c_{ij}^0) foi calculado a partir das coordenadas, utilizando o cálculo de distâncias euclidianas. Para os outros c_{ij}^p foi estabelecido um acréscimo de $\{0\%, 10\%, 20\%\}$ do valor inicial. O número de níveis foi pré-determinado como $L = 2$ e as tarifas (t_{ij}^p) para cada nível igual a $\{1, 2$ e $3\}$ unidades, respectivamente. A capacidade (u_{ij}) dos arcos foi acrescida por um multiplicador, proporcional aos níveis $\{1.0, 1.5, 2.0\}$. O número máximo de pedágios, R, foi definido como o total de arcos da rede.

Neste trabalho foi considerado a relaxação de integralidade das variáveis x_{ij}^p, x_{ij}^{kp} e y_{ij}^p, essas deixaram de ser inteiras, para assumirem valores contínuos. A solução da relaxação linear (RL) pode demonstrar o quanto a relaxação de um modelo é mais forte e também permite comparar os modelos em termos de limites inferiores que esse fornece. A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais. É possível perceber que o PLI dado pelo primeiro modelo resolve as instâncias mais rapidamente, mas os limites da relaxação linear do segundo modelo são melhores.

Tabela 1. Resultados Computacionais para os Modelos 1 e 2

		Modelo 1			Modelo 2			1 e 2
Instância	Total de Arcos	Função Objetivo	Tempo (s)	RL	Função Objetivo	Tempo (s)	RL	Pedágios Alocados
SiouxFalls_8	16	4.245.200	0.02	4.171.645	4.245.200	0.02	4.245.200	2
SiouxFalls_12	30	16.527.800	2.68	16.241.629	16.527.800	3.78	16.425.317	2
SiouxFalls_16	42	41.513.400	12.27	41.021.552	41.513.400	12.01	41.314.874	20
SiouxFalls_20	58	66.250.355	299.59	65.711.090	66.250.355	1578.34	65.841.253	30
SiouxFalls_24	76	91.628.611	-	91.099.847	91.724.608	-	91.397.715	46

5. Conclusão

Foram apresentados dois modelos de Programação Linear Inteira (PLI) para este problema. O PLI dado pela primeira formulação resolve as instâncias mais rápido do que o PLI dado pelo segunda, mas os limites da relaxação linear do segundo modelo são melhores. Como trabalho futuro, planeja-se utilizar técnicas exatas como geração de colunas e *branch-and-price* com o intuito de obter soluções para instâncias maiores em um tempo aceitável.

Referências

CPLEX, I. (2009). Ilog cplex homepage 2009.

Meng, Q. and Yang, H. (2002). Benefit distribution and equity in road network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(1):19–35.