# Uma versão algorítmica do Lema Local de Lovász*

**Bruno Pasqualotto Cavalar**[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010, 05508–090 São Paulo, SP

bruno.cavalar@usp.br

***Abstract.*** *The Lovász Local Lemma (LLL) is a powerful tool for proving the existence of combinatorial objects which satisfy a given set of constraints. More precisely, given a finite collection of "bad" events $\mathcal{A}$, the LLL gives sufficient conditions for the probability $\mathbb{P}\left[\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right]$ to be positive. In a breakthrough by Moser and Tardos [Moser and Tardos 2010], an efficient algorithm for finding objects whose existence is guaranteed by the LLL was developed. This work surveys a few applications of the LLL in combinatorics and seeks to apply the Moser-Tardos algorithm in those problems.*

***Resumo.*** *O Lema Local de Lovász (LLL) é uma ferramenta poderosa para provar a existência de objetos combinatórios que satisfazem um dado conjunto de restrições. Mais precisamente, dado uma coleção finita $\mathcal{A}$ de eventos "ruins", o LLL dá condições suficientes para que a probabilidade $\mathbb{P}\left[\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right]$ seja positiva. Em um celebrado artigo [Moser and Tardos 2010], Moser e Tardos desenvolveram um algoritmo para encontrar eficientemente tais objetos cuja existência é garantida pelo LLL. Esse trabalho discute aplicações do LLL em problemas de combinatória e aplica o algoritmo de Moser e Tardos nesses problemas.*

## 1. O Lema Local de Lovász

Seja $\mathcal{A}$ uma coleção finita de eventos não triviais num mesmo espaço de probabilidade. Se os eventos de $\mathcal{A}$ são mutuamente independentes, então $\mathbb{P}\left[\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right] = \prod_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{P}[\overline{A}] > 0$. É natural imaginar que algo similar acontece quando os eventos são "limitadamente dependentes". A seguinte definição ajuda a formalizar esse conceito.

**Definição 1.** Um digrafo $D = (\mathcal{A}, E)$ é dito um **digrafo de dependência** para $\mathcal{A}$ se cada evento $A \in \mathcal{A}$ é mutuamente independente dos eventos em $\mathcal{A} \setminus (\Gamma(A) \cup \{A\})$, onde $\Gamma(A) := \{B \in \mathcal{A} : (A, B) \in E\}$.

O Lema Local de Lovász nos permite evitar todos os eventos de $\mathcal{A}$, contanto que as probabilidades dos eventos não sejam muito grandes e o grafo de dependência não tenha muitas arestas.

**Teorema 2** (Lema Local de Lovász [Erdős and Lovász 1975]). *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção finita de eventos e $D = (\mathcal{A}, E)$ um digrafo de dependência para $\mathcal{A}$. Se existe uma função $x\colon \mathcal{A} \to [0, 1)$ tal que*

$$\mathbb{P}[A] \leq x(A) \prod_{B\in\Gamma(A)} (1 - x(B)) \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

*então* $\mathbb{P}\left[\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right] = \prod_{A\in\mathcal{A}}(1 - x(A)) > 0$. ■

*Trabalho executado com apoio da FAPESP, Proc. 2015/26678-9.

## 2. Algumas aplicações

Uma coloração própria de um grafo $G$ é dita $\beta$-frugal se cada cor aparece no máximo $\beta$ vezes na vizinhança de cada vértice. Defina $F(G)$ como o menor número para o qual existe uma coloração $\beta$-frugal de $G$ com $F(G)$ cores. Alon (veja [Hind et al. 1997, p. 478]) provou que existe uma constante $c = c_\beta$ tal que para todo $\Delta$ existe um grafo $G$ com grau máximo $\Delta$ que satisfaz $F(G) > c\Delta^{1+1/\beta}$. O seguinte teorema mostra que esse resultado é assintoticamente ótimo. (Este resultado é uma pequena amostra das ideias envolvidas na prova de que o número cromático total de um grafo é $\Delta + \mathrm{polylog}(\Delta)$ [Hind et al. 1999]).

**Teorema 3** (Hind, Molloy e Reed [Hind et al. 1997])**.** *Se $G$ tem grau máximo $\Delta \geq \beta^\beta$, então $G$ tem uma coloração $\beta$-frugal usando no máximo $16\Delta^{1+1/\beta}$ cores.*

*Demonstração.* Para $\beta = 1$, o resultado é equivalente a encontrar uma coloração própria de $G^2$, isto é, o grafo obtido de $G$ adicionando-se arestas entre vértices com distância igual a 2. Como esse grafo tem grau máximo menor ou igual a $\Delta^2$, ele tem uma coloração com $\Delta^2 + 1 \leq 16\Delta^2 = 16\Delta^{1+1/\beta}$ cores.

Suponha então que $\beta \geq 2$. Defina $C = 16\Delta^{1+1/\beta}$. Para cada vértice de $G$ atribuímos aleatoriamente uma cor entre $\{1, \ldots, C\}$ com probabilidade uniforme. Para cada aresta $uv$ de $G$ definimos o evento $A_{uv}$ de que os vértices $u$ e $v$ recebam a mesma cor. Chamamos tais eventos de eventos do Tipo A. Além disso, para cada conjunto $\{u_1, \ldots, u_{\beta+1}\}$ de $\beta+1$ vértices todos na vizinhança de um mesmo vértice, definimos o evento $B_{u_1,\ldots,u_{\beta+1}}$ de que cada $u_i$ receba a mesma cor. Chamamos tais eventos de eventos do Tipo B. Claramente, se evitamos todos os eventos do Tipo A e do Tipo B, então a nossa coloração aleatória é $\beta$-frugal.

Note que a probabilidade de cada evento do Tipo A é $1/C$, e a probabilidade de cada evento do Tipo B é $1/C^{\beta-1}$. Além disso, cada um dos eventos (Tipo A ou Tipo B) *não* é independente de no máximo $(\beta + 1)\Delta$ eventos do Tipo A e $(\beta + 1)\Delta\binom{\Delta}{\beta}$ eventos do Tipo B. Feitas estas observações, não é difícil verificar que a atribuição $x(A) = 2/C$ para eventos $A$ do Tipo A e $x(B) = 2/C^{\beta-1}$ para eventos $B$ do Tipo B satisfaz (1). ■

### 2.1. Outras aplicações

Omitimos provas por questões de espaço.

**Coloração acíclica de arestas**. Uma coloração própria das arestas de um grafo é dita acíclica se o grafo induzido pela união de quaisquer duas classes de cores é uma floresta. Molloy e Reed [Molloy and Reed 1999] provaram usando o LLL que todo grafo $G$ com grau máximo $\Delta$ tem uma coloração acíclica com no máximo $16\Delta$ cores.

**Satisfatibilidade de fórmulas $k$-CNF**. O problema da satisfatibilidade de fórmulas $k$-CNF consiste em, dada uma fórmula booleana $\phi$ na forma normal conjuntiva, onde cada cláusula tem exatamente $k$ literais distintos, decidir se existe uma interpretação satisfatível de $\phi$. Dizemos que uma cláusula intersecta outra cláusula se elas compartilham alguma variável. Erdős e Lovász [Erdős and Lovász 1975] provaram, usando o LLL, que toda fórmula $k$-CNF em que cada cláusula intersecta no máximo $2^{k-2}$ outras cláusulas é satisfatível. Note que isso não impõe restrições no número total de cláusulas.

**Roteamento de pacotes**. Considere um grafo $G$ e um conjunto de pacotes $i$, a cada um dos quais é associado um par de vértices $(s_i, t_i)$ e um caminho $P_i$ que conecta

$s_i$ a $t_i$. Cada pacote $i$ precisa percorrer o caminho $P_i$ para chegar ao seu destino final. Assumimos um modelo síncrono, em que cada aresta pode carregar apenas um pacote por instante de tempo. Nosso objetivo é encontrar um escalonamento que minimize o tempo de todos os pacotes chegarem ao seu destino final. Como os caminhos já estão especificados, nossa única decisão no escalonamento diz respeito ao sistema de filas, isto é: quando vários pacotes querem passar por uma mesma aresta, precisamos escolher quem passa primeiro.

Dois parâmetros são importantes no problema: a congestão $c$, definida como o número máximo de caminhos que passam por uma aresta qualquer, e a dilação $d$, definida como o comprimento maximo de um caminho qualquer. Não é difícil se convencer de que o tempo de um escalonamento ótimo é $\Omega(c + d)$. Leighton et al. [Leighton et al. 1999] demonstraram com o LLL a existência de um escalonamento $O(c + d)$, usando filas de tamanho constante em cada aresta.

## 3. O algoritmo de Moser e Tardos

Para conseguir uma versão algorítmica do LLL, Moser e Tardos consideraram um cenário levemente modificado do Lema Local de Lovász, mas que ainda é válido na maior parte das aplicações conhecidas.

Seja $\mathcal{P}$ um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes num mesmo espaço de probabilidade. Suporemos que todo evento de $\mathcal{A}$ é determinado por um subconjunto dessas variáveis. Diremos que uma atribuição de valores para as variáveis de $\mathcal{P}$ *viola* o evento $A \in \mathcal{A}$ se essa atribuição faz com que $A$ aconteça. Para cada evento $A \in \mathcal{A}$, denote por $\mathrm{vbl}(A)$ um conjunto minimal fixo das variáveis de $\mathcal{P}$ que determina $A$. Defina também $\Gamma(A) := \{B \in \mathcal{A} : \mathrm{vbl}(B) \cap \mathrm{vbl}(A) \neq \emptyset\}$.

Seja $D$ o digrafo com conjunto de vértices $\mathcal{A}$ e tal que a vizinhança de um evento $A$ é $\Gamma(A)$. Temos que $A$ é mutuamente independente de todos os eventos em $\mathcal{A} \setminus (\Gamma(A) \cup \{A\})$ e $D$ é um digrafo de dependência para $\mathcal{A}$. O algoritmo de Moser e Tardos é como segue.

**Algoritmo 1:** Algoritmo de Moser e Tardos

1 **para todo** $P \in \mathcal{P}$ **faça**
2     $v_P \leftarrow$ uma valoração aleatória de $P$ (de acordo com sua distribuição);
3 **enquanto** $\exists A \in \mathcal{A}$: *$A$ é violado quando* $(P = v_P : \forall P \in \mathcal{P})$ **faça**
4     escolha um evento violado $A \in \mathcal{A}$ de acordo com alguma regra qualquer fixada;
5     **para todo** $P \in \mathrm{vbl}(A)$ **faça**
6         $v_P \leftarrow$ uma nova valoração aleatória de $P$ (de acordo com sua distribuição);
7 **devolva** $(v_P)_{P \in \mathcal{P}}$

Cada vez que um evento $A$ é escolhido na linha 4 dizemos que ele foi *reamostrado*. Note que a eficiência do método depende de que (i) o número de reamostragens não é muito grande; (ii) valores aleatórios para cada variável $P \in \mathcal{P}$ podem ser eficientemente amostrados; (iii) verificar (e encontrar) a ocorrência de um evento também pode ser feito eficientemente. O resultado de Moser e Tardos trata do primeiro problema.

**Teorema 4** (Moser e Tardos [Moser and Tardos 2010]). *Seja $\mathcal{P}$ um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes num mesmo espaço de probabilidade e $\mathcal{A}$ uma coleção finita de eventos determinados por essas variáveis. Se $\mathcal{A}$ satisfaz as condições do LLL, então existe uma atribuição de valores às variáveis de $\mathcal{P}$ que não viola nenhum dos eventos de $\mathcal{A}$. Além disso, o número esperado de reamostragens do evento $A \in \mathcal{A}$ que o algoritmo aleatório acima faz é no máximo $x(A)(1-x(A))^{-1}$. Portanto, o número total esperado de amostragens é $\sum_{A\in\mathcal{A}} x(A)(1-x(A))^{-1}$.* ■

## 4. O algoritmo na prática

Uma análise mais cuidadosa do algoritmo de Moser e Tardos é feita em [Haeupler et al. 2011]. Um dos parâmetros fundamentais da análise é

$$\delta := \min_{A\in\mathcal{A}} x(A) \prod_{B\in\Gamma(A)} (1-x(B)).$$

Note que, nas hipóteses do LLL, vale que $\delta \geq \min_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{P}(A)$. O primeiro resultado de [Haeupler et al. 2011] é o seguinte.

**Teorema 5** (Hauepler, Saha e Srinivasan). *Suponha que estamos nas mesmas condições do Teorema 4. Então o número total esperado $E$ de amostragens realizadas pelo algoritmo satisfaz $E \leq n(\log 1/\delta) \max_{A\in\mathcal{A}}(1-x(A))^{-1}$.* ■

### Aplicação em colorações frugais

**Proposição 6.** *Seja $G$ um grafo nas condições do Teorema 3. Existe um algoritmo aleatório com tempo esperado $O(\beta n^2 \Delta \log \Delta)$ que encontra uma coloração $\beta$-frugal de $G$.*

*Demonstração.* Note que é possível descobrir se uma coloração não é frugal em tempo $O(n\Delta)$. Além disso, na prova do Teorema 3 os eventos satisfazem $\delta \geq \min_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{P}(A) = 1/C^{\beta-1}$. Portanto, $\log 1/\delta \leq \log(C^{\beta-1}) \leq \beta \log \Delta$. Temos ainda que $\max_{A\in\mathcal{A}}(1-x(A))^{-1} = 1/(1-2/C) \leq 3$. Segue que o tempo esperado do algoritmo de Moser e Tardos nesse problema é $E = O(\beta n^2 \Delta \log \Delta)$. ■

## Referências


Erdős, P. and Lovász, L. (1975). Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *Infinite and finite sets*, pages 609–627. North-Holland, Amsterdam.

Haeupler, B., Saha, B., and Srinivasan, A. (2011). New constructive aspects of the Lovász local lemma. *J. ACM*, 58(6):Art. 28, 28.

Hind, H., Molloy, M., and Reed, B. (1997). Colouring a graph frugally. *Combinatorica*, 17(4):469–482.

Hind, H., Molloy, M., and Reed, B. (1999). Total coloring with $\Delta + \mathrm{poly}(\log \Delta)$ colors. *SIAM J. Comput.*, 28(3):816–821.

Leighton, T., Maggs, B., and Richa, A. W. (1999). Fast algorithms for finding $O$ (congestion + dilation) packet routing schedules. *Combinatorica*, 19(3):375–401.

Molloy, M. and Reed, B. (1999). Further algorithmic aspects of the local lemma. In *STOC '98 (Dallas, TX)*, pages 524–529. ACM, New York.

Moser, R. A. and Tardos, G. (2010). A constructive proof of the general Lovász local lemma. *J. ACM*, 57(2):Art. 11, 15pp.